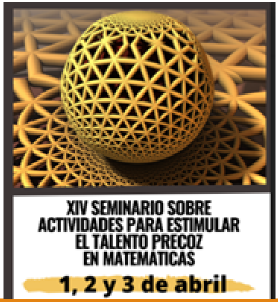
¿DÓNDE ESTAMOS? ¿DENTRO O FUERA?

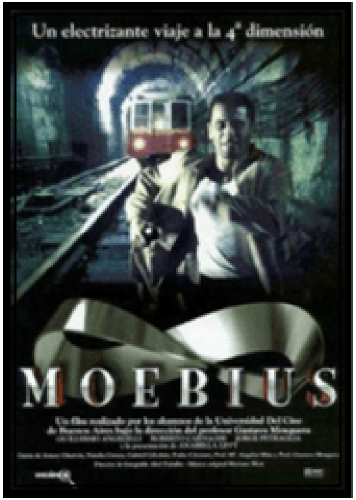


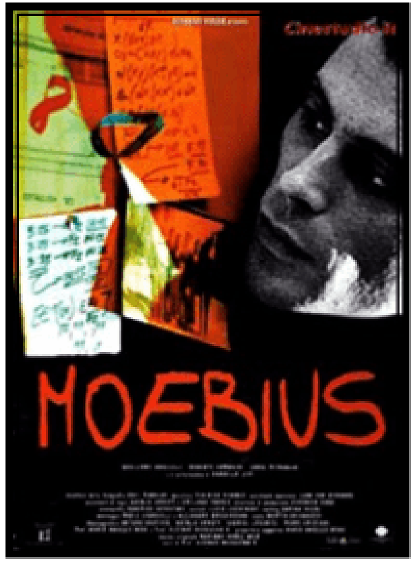
ESTALMAT CANARIAS

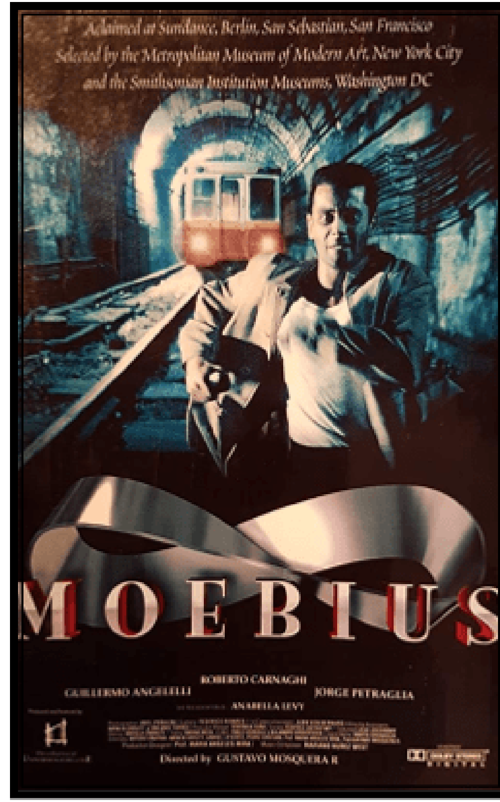
Luís López García

Teresita Talavera Santana

Gran Canaria, 1 de abril de 2022







Cine y matemáticas

Argumento

Director: Gustavo R. Mosquera

Estreno: 17 de octubre de 1996

Guión: Natalia Urruty, Arturo Oñativia, Gabriel Lifschittz y Pedro Cristianni según cuento de A. J. Deutch

Un tren del Metro de Buenos Aires desaparece inexplicablemente con más de 30 pasajeros. Los conductores de otras líneas creen oírlo, y de hecho los sistemas de seguridad detectan su presencia en diferentes ocasiones; sin embargo nadie consigue verlo, ni saber dónde está. Los responsables del subte (abreviatura de subterráneo, que es como llaman en Argentina al Metro) y las autoridades tratarán de resolver el enigma antes de que la opinión pública se entere del asunto. Ante el desinterés de los ingenieros constructores de los túneles, y sin muchas opciones más, aceptan sin mucha convicción que un joven matemático (topólogo, para más señas) estudie el problema y trate de encontrarle una solución. Sin embargo, sus explicaciones no serán muy bien recibidas.

TRAILER

Cine en ESTALMAT

1. Visionado anual de una película que nos inicie en el estudio de un tema.

2. En este caso, “Möebius” nos sirve como introducción o motivación para presentar la sesión destinada a Topología.

3. Además, damos a conocer la relación de las matemáticas con distintas disciplinas.

¿Qué es la topología?

Es la parte de las matemáticas que se ocupa de aquellas propiedades de los objetos geométricos que no varían cuando se les somete a transformaciones continuas. Estudia las propiedades cualitativas de los cuerpos, aquellas que permanecen aunque los objetos sean sometidos a deformaciones (continuas) como estiramientos, retorcidos, giros, etc., pero siempre sin cortar, rasgar o pegar durante este proceso.

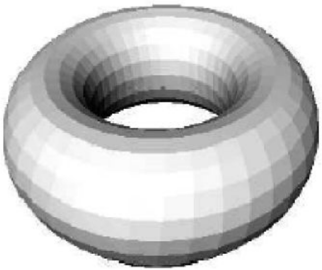
En topología, estas dos figuras son semejantes.

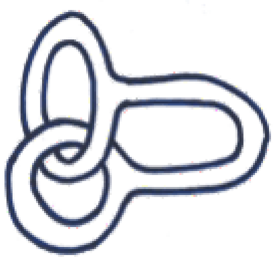
MATEMÁTICA DE LA GOMA ELÁSTICA

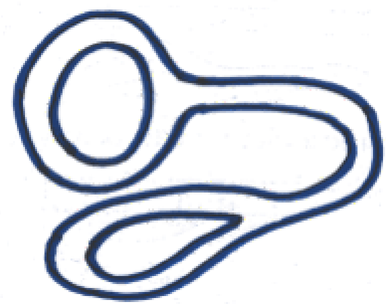
Para la topología un círculo y un triángulo son semejantes, ya que se puede construir una función continua e inversa también continua que transforma el círculo en un triángulo o viceversa, siempre y cuando no se corte la figura. De esta manera una recta y un círculo no son semejantes porque habría que unir y esto no está permitido.

¿Y ÉSTAS? ¿QUÉ OPINAN?

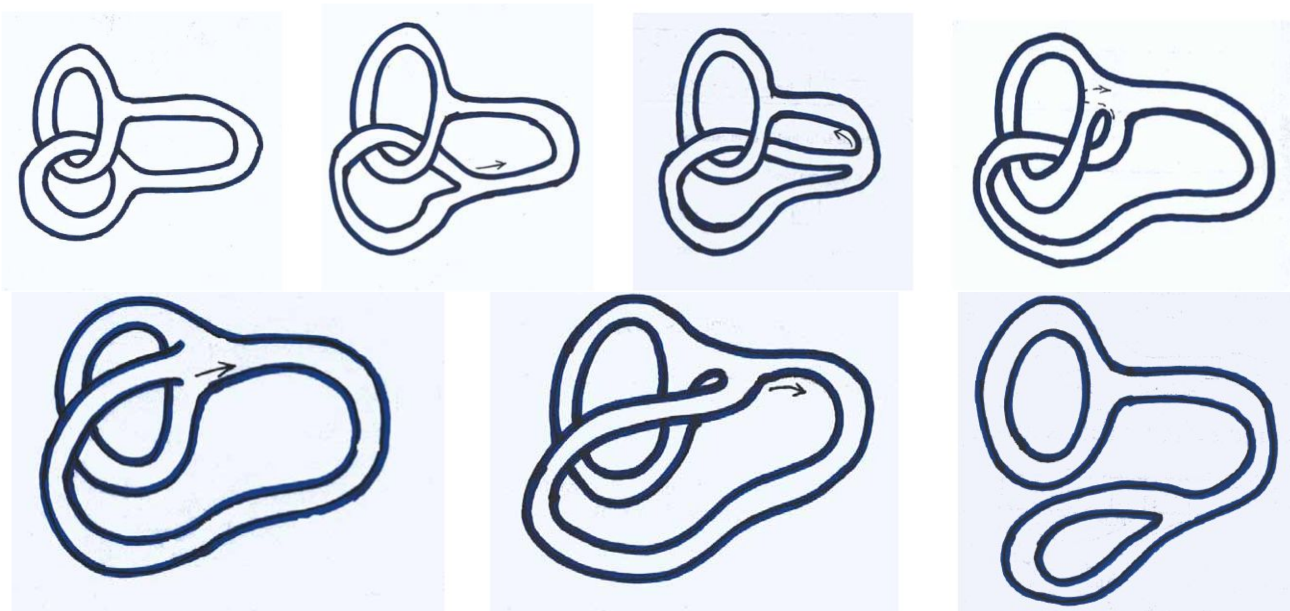
Para fundamentar nuestra definición vamos a usar plastilina ¿Podemos pasar de una figura a otra? ¿En qué casos?







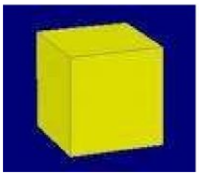
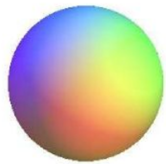
La primeras figuras no son Topológicamente semejantes y las segundas sí



Video “No todo es lo que parece” Aniceto Murillo. Universidad de Málaga. Un fisquito de matemáticas. ULL.

Semejanzas topológicas

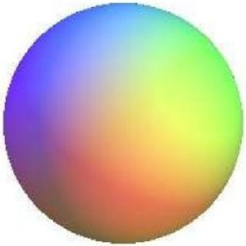
Topológicamente un cubo es equivalente a una esfera y a un elipsoide


–

–


Y una taza es equivalente a un donut

Bordes, caras y agujeros

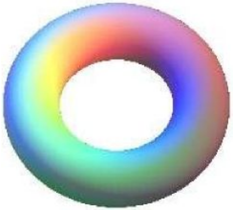
- Una determinada figura… ¿tiene agujeros? ¿tiene borde? ¿está formada por varias caras?



No tiene

borde, tiene una cara y no tiene agujeros

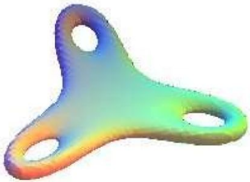
Tiene borde, no tiene agujeros y tiene dos caras



No tiene borde,

tiene un agujero y tiene

una cara

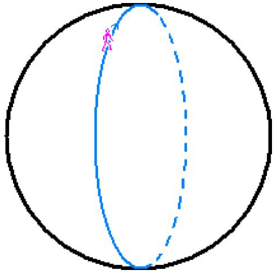


No tiene borde, tiene tres agujeros y tiene una cara

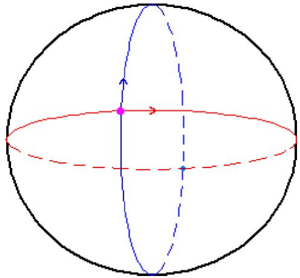
Ahora, busca figuras topológicamente equivalentes a las anteriores y dibújalas.

Un paseo por la Tierra.

*Si partimos de un lugar de la Tierra y avanzamos sin desviarnos, al cabo de un tiempo, volveremos al punto de partida.



*Si dos personas parten en direcciones perpendiculares y van dejando en su camino una marca de hilo, una de color azul y la otra de color rojo, comprueban que en algún momento sus caminos se han cruzado.



Razona….

- **Si la Tierra no fuera una esfera..**
- ¿Podría ocurrir que las dos personas que parten en direcciones perpendiculares, desde un mismo punto y vuelven al punto de partida, sus caminos no se crucen? ¿Podría ocurrir que una persona camina sin desviarse y retorna al punto de partida, pero cabeza abajo? **Mas adelante daremos respuesta a éstas preguntas…**

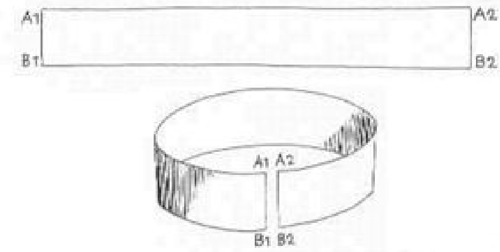
Volvemos a recordar: La topología es una rama fundamental de las Matemáticas que estudia las propiedades de un objeto que se conservan por deformación o estiramiento.

Por ejemplo: la redondez de una circunferencia no es una propiedad topológica ¿por qué?

Vamos a experimentar

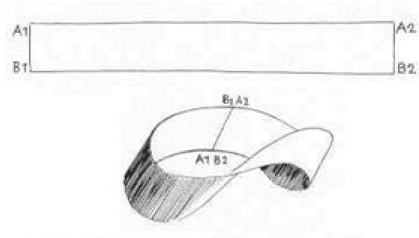
1. Divide un folio en cuatro rectángulos iguales y recórtalos.
2. A dos de ellos, les haremos unas líneas que lo dividan en cuatro partes iguales, longitudinalmente, es decir, tres líneas (por las dos caras y en cada cara dibujadas de un color diferente). Ojo, el borde de la tira no debe tener ninguna línea dibujada.
3. A las otras dos, les haremos unas líneas que dividan longitudinalmente a las tiras en tres partes iguales (por las dos caras y cada cara de un color diferente). Ojo, el borde de la tira no debe dibujarse.

Tareas..



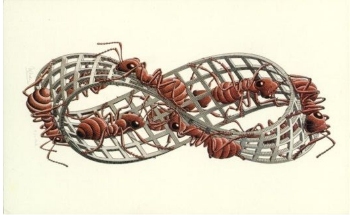
1. Con una de las tiras de papel dividida en cuatro partes (con líneas) construimos un cilindro. Para ello pegamos los extremos de la tira con cinta o grapas. ¿Cuántas caras tiene? ¿Cuántos bordes tiene? Para ayudarnos a averiguarlo, con un rotulador, pintaremos el borde y la cara.
2. Ahora, una vez formado el cilindro, cortaremos por la línea central. Antes de hacerlo, intenta deducir ¿Cuántas superficies se obtendrán? ¿Con cuántas caras y bordes? Comprueba si se ha obtenido lo que se pensaba inicialmente. Al final, la figura o figuras resultantes las volveremos a cortar por la mitad. ¿Qué ocurre?¿Cuántas caras y bordes obtenemos?

Tareas..



1. Cogeremos la tira que estaba dividida en cuatro partes y, antes de pegar sus extremos, haremos un giro de 180°. Esta figura es la banda de Möbius. ¿Cuántas superficies se obtienen? ¿Con cuántas caras y bordes? Para averiguar cuántos bordes y caras, usa un rotulador para pintarlo.
2. Antes de cortar por la línea central, intenta deducir ¿Cuántas superficies se obtendrán? ¿Con cuántas caras y bordes? Luego hazlo y comprueba si se ha obtenido lo que se pensaba inicialmente.

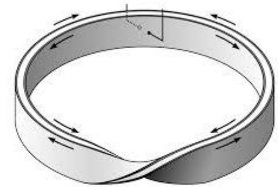
Tareas



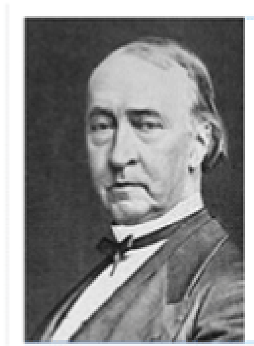
1. La figura o figuras resultantes del ejercicio anterior, las volveremos a cortar por la mitad. ¿Qué ocurre?¿Cuántas caras y bordes obtenemos?
2. Ahora usaremos las dos tiras de papel con dos líneas que la dividen en tres partes y construimos un cilindro y una cinta de Möbius. Cortamos por una de las líneas ¿qué se obtiene en cada caso? ¿cuántas caras y bordes tienen?

RECORTAMOS POR EL CENTRO TRES TIRAS UNIDAS POR LOS EXTREMOS ¿DE QUÉ DEPENDE EL RESULTADO FINAL? ¿ES MAGIA O MATEMÁTICAS?

Algo de historia…



La **banda** o **cinta de Möbius** o **Moebius** es una superficie con una sola cara y un solo borde. Tiene la propiedad matemática de ser un objeto no orientable. Fue descubierta en 1858 de forma independiente por los matemáticos alemanes Johan Benedict Listing y Augus Ferdinand Möbius.

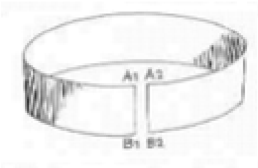


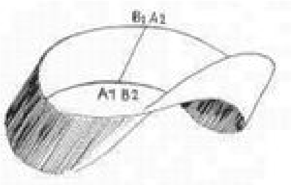
Johann Benedict Listing
(1808- 1882)

August F. Möbius
(1790-1868)

PROPIEDADES

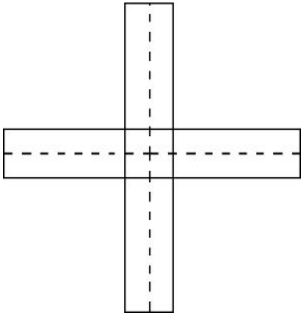
- Cuando se pega una cinta por sus extremos sólo hay dos posibilidades, es un cilindro o una banda de Möebius.
- Si el giro es un múltiplo par de 180° la figura es un cilindro.
- Si el giro es un múltiplo impar de 180° la figura es una banda de Möebius.



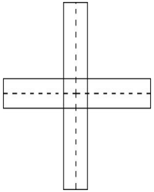


Tareas con cruces de Möbius

- Divididos un folio de la misma forma que el anterior y dibujamos en tres de los rectángulos resultantes una línea central y en el otro, dos líneas longitudinales que lo dividan en tres partes.
- Formando una cruz (con una línea en el medio) unimos las aspas opuestas creando dos cilindros. ¿Qué características topológicas tiene la nueva superficie? ¿cuántas caras, agujeros y bordes tiene?
- Si cortamos por la línea central. ¿qué se obtiene?



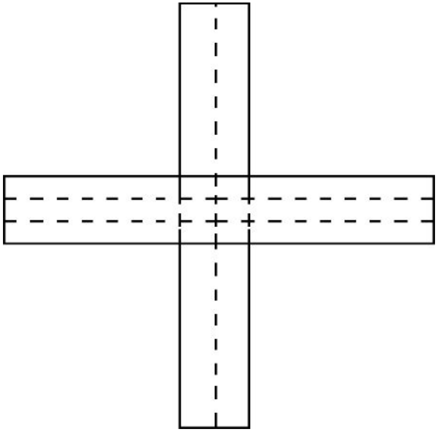
Tareas con cruces de Möbius



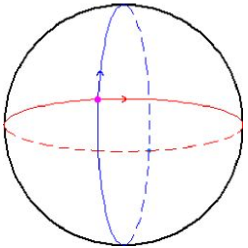
1. Con otra cruz similar, unimos dos de las aspas formando un cilindro y las otras dos formando una banda de Möbius. ¿Qué características topológicas tiene la nueva superficie? ¿cuántas caras, agujeros y bordes tiene?
2. Si cortamos por la línea central, ¿qué se obtiene?
3. Con otra cruz similar, unimos los dos pares de aspas opuestas formando bandas de Möbius. ¿Qué características topológicas tiene la nueva superficie? Si cortamos por la línea central, ¿qué se obtiene? Compara el resultado con lo obtenido anteriormente.

Más tareas con cruces

1. Usamos ahora la cruz que tiene un par de aspas divididas en tres partes. Unimos el par de aspas con una sola línea formando un cilindro y el par de aspas con dos líneas formando una banda de Möbius. Cortamos por las líneas, empezando por la banda de Möbius. ¿Qué se obtiene?

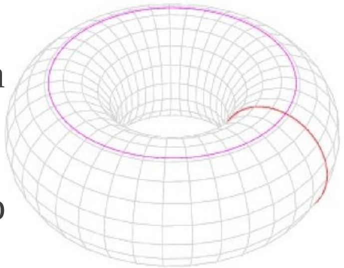


Respuestas a nuestras preguntas iniciales.



Si una superficie no tiene agujeros y dibujamos una circunferencia, se divide en dos partes o componentes conexas.

Si comenzamos a trazar otra circunferencia que cruza la primera tendremos que volver a cruzar la primera circunferencia.



Si la superficie tiene un agujero, podemos dibujar una circunferencia que no la divide en dos componentes conexas.

Podemos trazar otra circunferencia que corta a la primera solo en un punto. Esa figura es un toro o donut.

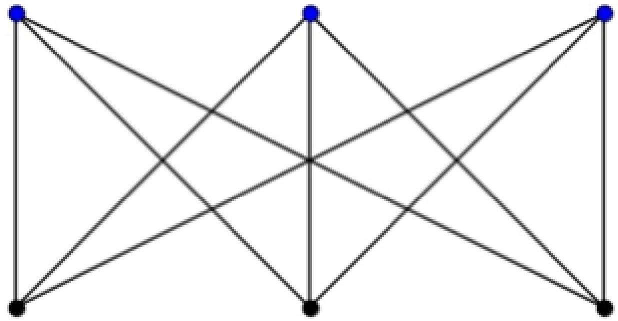
Si partiéramos de un punto determinado de la cinta de Möbius y quisiéramos volver al mismo punto, llegaríamos al mismo punto, pero boca abajo.

Las casas y los pozos

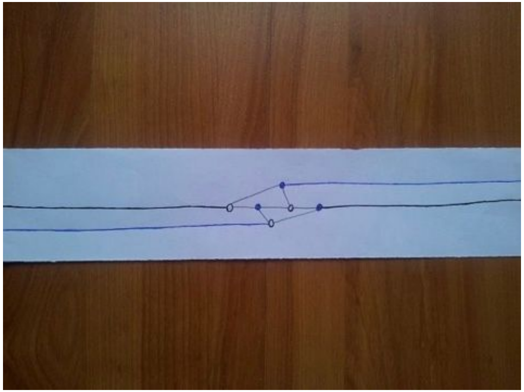
Las casas y los pozos

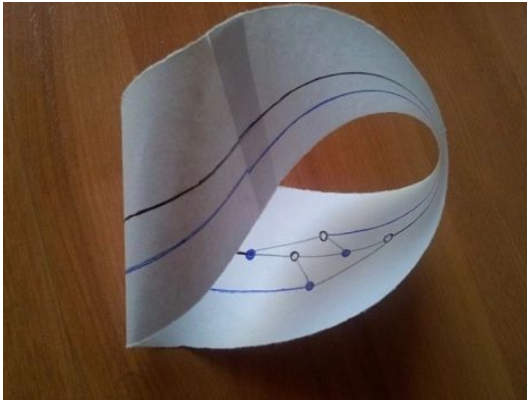
Este problema no tiene solución usando la teoría de grafos. Esta situación la podemos modelizar y obtenemos el grafo K3,3 (la K es en honor a Kazimierz Kuratowski), por lo que el problema ahora sería el siguiente:

¿podemos construir el grafo anterior en un plano de forma que no haya dos aristas que se corten en un punto que no sea un vértice?



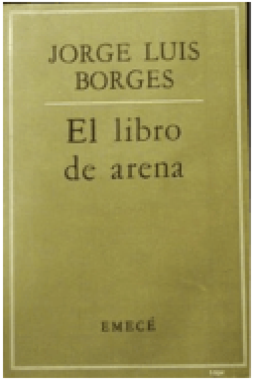
Ahora si en lugar del plano trabajamos en una cinta de Möebius las conexiones si se pueden realizar, como vemos en las dos imágenes siguientes. También tiene solución si usamos un toro.





Moebius y Literatura

Jorge Luis Borges en sus relatos nos habla de laberintos, del tiempo y del infinito. En uno de ellos, “El libro de arena”, se nos presenta un interesante planteamiento: un libro cuyo número de páginas es infinito, que a la página 40514 le sigue la 999, que es imposible abrirlo por el principio o por el final y en el que nunca podemos volver a encontrar un página que ya hayamos visto previamente.



Dentro de el hay un cuento “El disco”…

El disco (1975). Resumen

En este relato, Borges nos narra la existencia de un objeto único, el disco de Odín, que posee un solo lado.

El cuento transcurre en Inglaterra, en un tiempo indeterminado. Comienza con la llegada de un anciano sin recursos a la casa de un leñador que le da cobijo. Al día siguiente, el vagabundo, que se cree un rey en el destierro, le confiesa al leñador que posee un valioso objeto: “Es el disco de Odín. Tiene un solo lado. En la tierra no hay otra cosa que tenga un solo lado. Mientras esté en mi mano seré el rey”. Se lo muestra en su mano pero el leñador únicamente ve un brillo dado que es visible solo por una cara.

Esta confesión provoca la codicia del leñador que lo asesina para obtenerlo, sin embargo, el disco cae al suelo y el leñador no puede encontrarlo al caer por el lado invisible.

El cuento termina con las palabras del leñador: “Al volver a mi casa busqué el disco. No lo encontré. Hace años que sigo buscando”.

El disco (1975). Cuento

Cierro la puerta de mi casa con una piedra para que la nieve no entre. Una tarde oí pasos trabajosos y luego un golpe. Abrí y entró un desconocido. Era un hombre alto y viejo, envuelto en una manta raída. Le cruzaba la cara una cicatriz. Los años parecían haberle dado más autoridad que flaqueza, pero noté que le costaba andar sin el apoyo del bastón. Cambiamos unas palabras que no recuerdo. Al fin dijo: —No tengo hogar y duermo donde puedo. He recorrido toda Sajonia.

Esas palabras convenían a su vejez. Mi padre siempre hablaba de Sajonia; ahora la gente dice Inglaterra.

Yo tenía pan y pescado. No hablamos durante la comida. Empezó a llover. Con unos cueros le armé una yacija en el suelo de tierra, donde murió mi hermano. Al llegar la noche dormimos.

El disco (1975). Cuento

Clareaba el día cuando salimos de la casa. La lluvia había cesado y la tierra estaba cubierta de nieve nueva. Se le cayó el bastón y me ordenó que lo levantara.

—¿Por qué he de obedecerte? —le dije.

—Porque soy un rey —contestó.

Lo creí loco. Recogí el bastón y se lo di.

Habló con una voz distinta.

—Soy rey de los Secgens. Muchas veces los llevé a la victoria en la dura batalla, pero en la hora del destino perdí mi reino. Mi nombre es Isern y soy de la estirpe de Odín.

—Yo no venero a Odín —le contesté—. Yo venero a Cristo.

Como si no me oyera continuó:

—Ando por los caminos del destierro pero aún soy el rey porque tengo el disco.

El disco (1975). Cuento

¿Quieres verlo?

Abrió la palma de la mano que era huesuda. No había nada en la mano. Estaba vacía. Fue sólo entonces que advertí que siempre la había tenido cerrada.

Dijo, mirándome con fijeza:

—Puedes tocarlo.

Ya con algún recelo puse la punta de los dedos sobre la palma. Sentí una cosa fría y vi un brillo. La mano se cerró bruscamente. No dije nada. El otro continuó con paciencia como si hablara con un niño:

—Es el disco de Odín. Tiene un solo lado. En la tierra no hay otra cosa que tenga un solo lado. Mientras esté en mi mano seré el rey.

—¿Es de oro? —le dije.

—No sé. Es el disco de Odín y tiene un solo lado.

El disco (1975). Cuento

Entonces yo sentí la codicia de poseer el disco. Si fuera mío, lo podría vender por una barra de oro y sería un rey.

Le dije al vagabundo que aún odio:

—En la choza tengo escondido un cofre de monedas. Son de oro y brillan como el hacha. Si me das el disco de Odín, yo te doy el cofre.

Dijo tercamente. —No quiero.

—Entonces —dije— puedes proseguir tu camino.

Me dio la espalda. Un hachazo en la nuca bastó y sobró para que vacilara y cayera, pero al caer abrió la mano y en el aire vi el brillo. Marqué bien el lugar con el hacha y arrastré el muerto hasta el arroyo que estaba muy crecido. Ahí lo tiré.

Al volver a mi casa busqué el disco. No lo encontré. Hace años que sigo buscando.

BANDA DE MÖEBIUS BENEDETTINA

Es obvio que ando escaso de dinero
y nadie en este barrio me conoce.
Transparente resulto a las miradas,de las
bellas que pasan junto a mí.
Pero ven, deja que te muestre,
mira y verás:

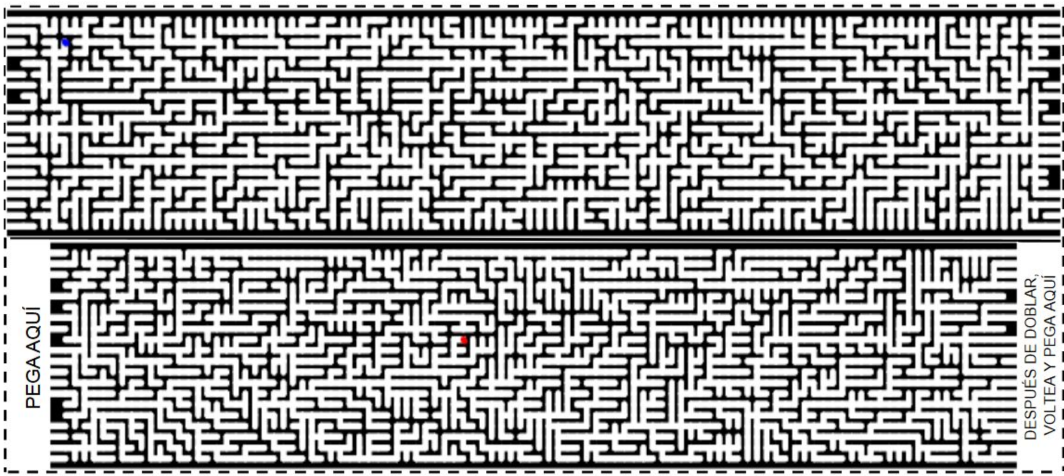
Si cortamos una cinta bien larga,y
pegamos sus bordes con cuidado,surgirá
un mundo de solo una cara
donde, alegres, vivir desorientados.

Antonio Córdoba Barba

Murcia (1949)

Möbius. Un laberinto particular

Laberinto en una cinta de Moebius



Instrucciones de montaje

1.– Cortar por las líneas discontinuas.

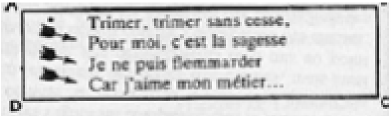
2.– Doblar, en montaña, por la línea continua y pegar.

3.– Construir la cinta de Moebius con la banda creada.

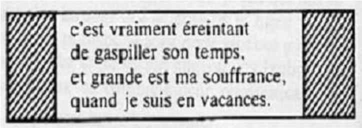
XIV FERIA DE LA CIENCIA. GRUPO ALQUERQUE

Möbius y poesía. Marta Macho

- Uno de los ejemplos que suele mostrar en sus charlas sobre topología es un poema sobre cinta de Möbius propuesto por el patafísico Luc Étienne .El autor utiliza dos de las propiedades principales de esta superficie con borde que posee una única cara y es no orientable. Para escribir este especial poema, Luc Étienne proporciona unas precisas instrucciones:
- En la primera cara de una tira de papel rectangular (al menos 10 veces más larga que ancha) se escribe la mitad de la poesía:
- ***Trabajar, trabajar sin cesar,***
  para mi es obligación no puedo flaquear pues amo mi profesión…



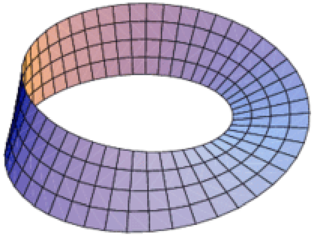
- Se gira esta banda de papel sobre su lado más largo (es esencial), y se escribe la segunda mitad del poema:
- **Es realmente un tostón**
  perder el tiempo, y grande es mi sufrimiento, cuando estoy de vacación.



- **Construye la banda de Möbius ¿Qué lees ahora?**
- **Siguiendo estas indicaciones, elaborar un poema, partiendo de otros dos**

La banda de Möbius en otras disciplinas

- La banda de Möbius es una superficie que, por sus sorprendentes propiedades, ha sido y es utilizada en campos tan dispares como la Matemática, el Arte, la Ingeniería, la Magia, la Ciencia, la Arquitectura, la Música, el Diseño, la Literatura, etc.
- Para hacernos una idea de dónde puede aparecer, acudiremos al trabajo de recopilación de Marta Macho, que adjuntamos.



Otros recursos y bibliografía

“Möbius” corto de Vincent Laforet

Blog de la Facultad de Ciencia y Tecnología. Marta Macho. Universidad del País Vasco.

Mobius Strip

“No todo es lo que parece” Aniceto Murillo. Universidad de Málaga.
Un fisquito de matemáticas. ULL.

Listing, Möbius y su famosa banda. Marta Macho 2009

JS Bach BWV 1079 Canon Cangrejo en Banda Moëbius.wmv

Charlamos con....

¡GRACIAS!

ESTALMAT

Canarias